

Metoda Monte Carlo

Dariusz Borkowski

Metoda Monte Carlo

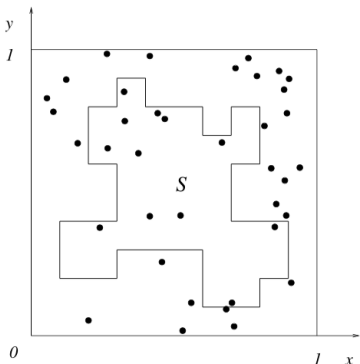
Metodą Monte Carlo (MC) nazywamy dowolną metodę używającą liczb losowych do rozwiązania problemu. Lub bardziej formalnie

Definicja 1. *(Halton, 1970) Metoda Monte Carlo jest to metoda reprezentująca rozwiązanie problemu w postaci parametru pewnej hipotetycznej populacji i używająca sekwencji liczb losowych do skonstruowania próby losowej danej populacji, z której to statystyczne oszacowania tego parametru mogą być otrzymane.*

Aż do czasu pojawienia się komputerów metoda MC nie mogła być stosowana szerzej, gdyż ręczne modelowanie zmiennych losowych jest zadaniem bardzo pracochłonnym. Pojawienie się metody MC jako całkowicie uniwersalnej metody obliczeń stało

się możliwe tylko dzięki pojawieniu się komputerów.

Sama nazwa „Monte Carlo” pochodzi od miasta Monte Carlo w Księstwie Monako, słynnego ze swoich domów gry posiadających jeden z najprostszych mechanizmów do otrzymywania liczb losowych jakim jest ruletka.



Przykład 1. Założymy, że musimy obliczyć pole powierzchni figury płaskiej S . Założmy, że jest ona zawarta w jednostkowym kwadracie jak na rysunku.

Weźmy N punktów losowo rozmieszczonych we

wnętrzu kwadratu. Oznaczmy przez N' liczbę punktów z wnętrza S . Jasno wynika, że pole S można przybliżyć stosunkiem N'/N . Im większe jest N tym oszacowanie to jest lepsze.

W przykładzie, przedstawionym na rysunku, wzięto 40 punktów. Dwanaście z nich leży wewnątrz S . Stosunek N'/N wynosi $12/40 = 0.30$. Dokładne pole S jest równe 0.35.

Dwie właściwości metody Monte Carlo

1. Pierwszą własnością metody, to prosta struktura algorytmu obliczeń. Z reguły buduje się program realizacji jednego zdarzenia losowego. Następnie zdarzenie to powtarza się N -razy tak by każdy eksperyment był niezależny od poprzednich i wyniki wszystkich doświadczeń uśrednia się.
2. Drugą cechą metody Monte Carlo jest zbieżność obliczeń, proporcjonalna z reguły do $\sqrt{D/N}$, gdzie D jest pewną stałą a N liczbą prób. Widać stąd, że w celu 10-krotnego zmniejszenia błędu, należy zwiększyć N 100 razy.

Monte Carlo jest szczególnie efektywna przy rozwiązywaniu tych problemów, dla których wystarcza znajomość wyniku z niewielką dokładnością.

Ten sam problem można jednakże rozwiązywać z zastosowaniem różnych wariantów metody Monte Carlo, którym odpowiadają różne wartości parametru D . W wielu przypadkach udaje się polepszyć dokładność, wybierając ten sposób obliczeń, któremu odpowiada znacznie mniejsza wartość D .

Obliczanie całek oznaczonych metodą Monte Carlo

Chcemy obliczyć całkę

$$I = \int_a^b g(x) dx.$$

Weźmy zmienną losową ξ o gęstości $p(x)$ na (a, b) , wówczas całkę możemy wyznaczyć następująco

$$I = \int_a^b \frac{g(x)}{p(x)} p(x) dx.$$

Na mocy centralnego twierdzenia granicznego

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(\xi_i)}{p(\xi_i)}$$

dla odpowiednio dużego N i N niezależnych wartości $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ zmiennej losowej ξ . Jednocześnie, z bardzo dużym prawdopodobieństwem błąd przybliżenia nie przekracza

$$3\sqrt{\frac{D \frac{g(\xi)}{p(\xi)}}{N}}.$$

Okazuje się, że wielkość $D \frac{g(\xi)}{p(\xi)}$ jest najmniejsza jeżeli wybierzemy zmienną losową ξ o gęstości $p(x)$, która jest proporcjonalna do $|g(x)|$.

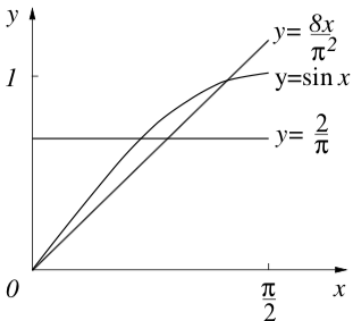
Zadanie 1. *Oblicz w przybliżeniu całkę*

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx,$$

której dokładna wartość wynosi 1. Wykorzystaj w obliczeniach dwie różne zmienne losowe ξ :

1. o stałej gęstości $p(x) = 2/\pi$,
2. o gęstości $p(x) = 8x/\pi$.

Na rysunku widzimy, że druga gęstość bardziej przypomina kształtem $|\sin(x)|$ i powinna dawać dokładniejszy wynik.



Literatura

- [1] D. Kincaid, W. Cheney, Analiza numeryczna, WNT, Warszawa 2006.
- [2] D. Borkowski, Z. Pogorzały, Wstęp do Metod Numerycznych, Uniwersytet Mikołaja Kopernika, Toruń 2012.
- [3] P. Krzyżanowski, L. Plaskota, Metody numeryczne, Kurs internetowy
<http://wazniak.mimuw.edu.pl>
- [4] J. H. Mathews, K. D. Fink, Numerical Methods Using MATLAB, Prentice Hall, 1999.
- [5] R. Wieczorkowski, R. Zieliński, Komputerowe generatory liczb losowych, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.

[6] I. M. Sobol, Metoda Monte Carlo, AB, 2017.