

**Rozwiązywanie
równań
różniczkowych
zwyczajnych - wzór
Taylora**

Dariusz Borkowski

Zagadnienie początkowe jest opisane równaniami

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

gdzie wartości t_0 , x_0 oraz funkcja f jest dana. Naszym zadaniem jest znalezienie funkcji $x(t)$, która spełnia powyższe równania. Dla przejrzystości zapisu będziemy używać notacji

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja f jest ciągła dla $a \leq t \leq b$, $-\infty < x < \infty$ i Lipschitzowska ze względu na zmienną x , to zagadnienie początkowe ma w przedziale $[a, b]$ jednoznaczne rozwiązanie.*

Rozwiązując numerycznie równanie różniczkowe, otrzymujemy tablicę przybliżeń dokładnego rozwiązania w pewnych punktach. Dopiero za pomocą tej tablicy można w razie potrzeby zbudować funkcję (np. sklejaną) przybliżającą rozwiązanie

Metoda wynikająca z wzoru Taylora

Metoda oparta na wzorze Taylora rzędu n polega na zastosowaniu wzoru Taylora do n -tej pochodnej

$$x(t+h) \approx x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!}x''(t) + \cdots + \frac{h^n}{n!}x^{(n)}(t),$$

Błąd pojedynczego kroku wynosi $O(h^{n+1})$, a błąd końcowy metody to $O(h^n)$.

Najprostszą metodą opartą na wzorze Taylora, a więc rzędu pierwszego, jest metoda Eulera. Opisuje ją wzór

$$x(t+h) \approx x(t) + hx'(t) = x(t) + hf(t, x).$$

Zadanie 1. Stosując dwa kroki metody Eulera, znajdź wartość przybliżoną rozwiązania zagadnienia początkowego

a) $x' = \cos(t) - \sin(x) + t^2$, $x(-1) = 3$, $h = 0.1$,

b) $x' = -tx^2$, $x(0) = 2$, $h = 0.1$,

c) $x' = x^2 + xe^t$, $x(0) = 1$, $h = 0.01$,

d) $x' = \frac{tx-x^2}{t^2}$, $x(1) = 2$, $h = \frac{1}{128}$.

Zadanie 2. Stosując dwa kroki metody rzędu 2 wynikającej ze wzoru Taylora znajdź wartość przybliżoną rozwiązania zagadnienia początkowego

a) $x' = -tx^2$, $x(0) = 2$, $h = 0.1$,

b) $x' = x^2 + xe^t$, $x(0) = 1$, $h = 0.01$,

c) $x' = \cos(t) - \sin(x) + t^2$, $x(-1) = 3$, $h = 0.1$,

d) $x' = \frac{tx-x^2}{t^2}$, $x(1) = 2$, $h = \frac{1}{128}$.

Wadą przedstawionego podejścia jest konieczność znalezienia wyrażeń dla pochodnych funkcji f względem t do n -tej włącznie. Aby napisać program obliczanie tych pochodnych trzeba zaprogramować. Kolejna metoda zwana metodą Rungego-Kutty nie ma takiej wady.