

Wyznaczanie pierwiastków wielomianów - metoda Laguerre'a

Dariusz Borkowski

M

etody Laguerre'a używa się w wielu nowych pakietach oprogramowania gdyż jest odporna, a jej zbieżność jest sześcienna w otoczeniu każdego pierwiastka pojedynczego. Jest to metoda iteracyjna, a przejście od danego przybliżenia pierwiastka do nowego przybliżenia następuje według wzorów:

$$A := -W'(z)/W(z),$$

$$B := A^2 - W''(z)/W(z),$$

$$C := \frac{1}{n}[A \pm \sqrt{(n-1)(nB - A^2)}],$$

$$z := z + 1/C,$$

gdzie n oznacza stopień wielomianu W , a znak w definicji C wybieramy tak, żeby $|C|$ było jak największe.

Zadanie 1. Wykonaj dwie iteracje metody Laguerre'a.

a) $W(z) = z^2 + 1, z_0 = 0,$

b) $W(z) = z^4 + 1, z_0 = 1.$

Zauważmy, że w algorytmie Laguerre'a musimy w każdej iteracji policzyć wartość, pochodną i drugą pochodną naszego wielomianu dla kolejnego przybliżenia. W tym celu wykorzystamy poznany wcześniej schemat Hornera. Algorytm na liczenie drugiej pochodnej jest prawie identyczny jak w przypadku liczenia pochodnej (druga pochodna jest pierwszą pochodną pochodnej wielomianu). Jedna rzecz tylko się nie do końca zgadza. Wyraz wolny w drugiej pochodnej jest postaci $2a_2$, czyli algorytm na liczenie drugiej pochodnej nie może się kończyć dodaniem a_2 . Na końcu musimy przemnożyć otrzymany wynik przez 2.

Zadanie 2. *Napisz w MATLAB-ie program realizujący algorytm Hornera wyznaczania wartości wielomianu, jego pochodnej oraz drugiej pochodnej. Deklaracja funkcji powinna być następująca:*

$$[y, z, v] = ddhorner(W, x),$$

gdzie

W – współczynniki wielomianu,

x – argument,

y – wartość wielomianu,

z – wartość pochodnej wielomianu,

v – wartość drugiej pochodnej wielomianu.

Rozwiązanie:

```
function [y, z, v]=ddhorner(W,x)
    n=length(W);
    y=W(1);
    z=0;
```

```

v=0;
for i=2:n
    v=z+v.*x;
    z=y+z.*x;
    y=y.*x+W(i);
end
v=2.*v;
end

```



Zadanie 3. *Sprawdź program ~~ddh~~horner dla poniższych wielomianów oraz punktów.*

a) $3z^5 - 7z^4 - 5z^3 + z^2 - 8z + 2$ w $z = 4$,

b) $9z^4 - 7z^3 + z^2 - 2z + 5$ w $z = 6$.

Zadanie 4. *Napisz w MATLAB-ie program realizujący algorytm Laguerre'a. Do wyznaczenie warto-*

ści wielomianu, jego pochodnej oraz drugiej pochodnej wykorzystaj program `ddhorners`. Deklaracja funkcji powinna być następująca:

$[p_n, err, k] = \text{laguerre}(W, p_0, \text{delta}, \text{max}),$

gdzie

W – współczynniki wielomianu,

p_0 – punkt startowy,

delta – dokładność rozwiązania; Żądamy aby był spełniony warunek ($|p_n - p_{n-1}| < \text{delta}$), gdzie p_n jest przybliżonym rozwiązaniem, a p_{n-1} przedostatnim elementem ciągu,

max – ograniczenie na liczbę kroków; program nie może wykonać więcej niż max iteracji,

p_n – przybliżone rozwiązanie,

err – błąd rozwiązania; $err = |p_n - p_{n-1}|$, gdzie p_n oraz p_{n-1} są dwoma ostatnimi elementami ciągu,

k – liczba kroków po której wyznaczono rozwiązanie.

Rozwiązanie: *laguerre.m*



Zadanie 5. Sprawdź program *laguerre* dla poniższych wielomianów i punktów początkowych.

a) $z^4 + i$ oraz $z_0 = 1 + i$,

b) $3z^5 - 7z^4 - 5z^3 + z^2 - 8z + 2$ oraz $z_0 = i$.