

Wyznaczanie pierwiastków wielomianów - metoda Newtona

Dariusz Borkowski

M

etody opisane wcześniej można stosować do wielomianów, jednak szukając pierwiastków wielomianów powinniśmy wykorzystać specjalną postać tych funkcji. Zasadnicze twierdzenie algebry mówi, że

Twierdzenie 1. *Każdy wielomian różny od stałej ma co najmniej jeden pierwiastek w ciele liczb zespolonych.*

Pierwsza metoda, którą zastosujemy do znalezienia tego pierwiastka to będzie iteracyjna metoda Newtona.

Schemat Hornera

W każdym kroku metody Newtona musimy policzyć wartość wielomianu oraz wartość jego pochodnej dla ustalonego argumentu. Niech będzie dany wielomian postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Wyznaczając wartość wielomianu musimy wykonać $(n - 1) + n$ mnożeń i n dodawań. Zapiszmy ten wielomian w innej postaci zwanej schematem Hornera

$$W(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \dots + x(a_{n-1} + x(a_n)))) \dots)$$

W tej postaci musimy wykonać już tylko n mnożeń (i n dodawań).

Podobny zabieg możemy wykonać dla pochodnej wielomianu (która również jest wielomianem).

$$\begin{aligned}
 W'(x) &= na_n x^{n-1} \\
 &+ (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + 2a_2x^1 + a_1 = \\
 &\qquad\qquad\qquad x^{n-1}a_n + \\
 &\qquad\qquad\qquad x^{n-2}(a_{n-1} + xa_n) + \\
 &\qquad\qquad\qquad x^{n-3}(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n)) + \\
 &\qquad\qquad\qquad \vdots \\
 &\qquad\qquad\qquad a_1 + x(a_2 + x(a_3 + \\
 &\dots + x(a_{n-3} + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + xa_n))))))
 \end{aligned}$$

Zastanówmy się co otrzymaliśmy. Poszczególne składniki sumy to kolejne iteracje powstające podczas liczenia wartości wielomianu przemnożone przez x w odpowiedniej potęgde. Ostatni element sumy to

już prawie wartość wielomianu. Jeszcze tylko trzeba przemnożyć przez x , dodać a_0 i gotowe. Otrzymaliśmy zatem algorytm na liczenie pochodnej i wartości wielomianu jednocześnie.

Zadanie 1. *Napisz w MATLAB-ie program realizujący algorytm Hornera wyznaczania wartości wielomianu oraz jego pochodnej. Deklaracja funkcji powinna być następująca:*

$$[y, z] = dhorner(W, x),$$

gdzie

W – współczynniki wielomianu,

x – argument,

y – wartość wielomianu,

z – wartość pochodnej wielomianu.

Rozwiązanie:

```
function [y, z]=dhorner(W, x)
    n=length(W);
    y=W(1);
    z=0;
    for i=2:n
```

```

        z=y+z.*x;
        y=y.*x+W(i);
    end
end

```



Zadanie 2. *Napisz w MATLAB-ie program realizujący algorytm Newtona wyznaczania pierwiastka wielomianu. Do wyznaczenia wartości wielomianu i jego pochodnej wykorzystaj program `dhornner`. Deklaracja funkcji powinna być następująca:*

`[pn,err,k]=polnewton(W,p0,delta,max),`

gdzie

`W` – współczynniki wielomianu,

`p0` – punkt początkowy,

`delta` – dokładność rozwiązania; żądamy aby był

spełniony warunek ($|p_n - p_{n-1}| < \delta$), gdzie p_n jest przybliżonym rozwiązaniem, a p_{n-1} przedostatnim elementem ciągu,
 $\max$ – ograniczenie na liczbę kroków; program nie może wykonać więcej niż $\max$ iteracji,
 p_n – przybliżone rozwiązanie,
 err – błąd rozwiązania; $err = |p_n - p_{n-1}|$, gdzie p_n oraz p_{n-1} są dwoma ostatnimi elementami ciągu,
 k – liczba kroków po której wyznaczono rozwiązanie.

Rozwiązanie: `polnewton.m`



Zadanie 3. Niech p będzie wielomianem stopnia co najmniej drugiego i niech ξ będzie jednym z jego pierwiastków. Metoda Newtona startując z punktu z_0 tworzy ciąg kolejnych przybliżeń. Jeżeli granica tego ciągu wynosi ξ to mówimy, że punkt początkowy z_0 jest przyciągany przez ξ . Zbiór wszystkich punktów przyciąganych przez ξ nazywamy zbiorem przyciągania dla ξ .

Napisz program, który metodą Newtona w dziedzinie zespolonej oblicza zbiory przyciągania dla pierwiastków wielomianu $p(z) = z^5 + 1$.

Rozwiązanie:



Zadanie 4. Napisz program, który stosując metodę Newtona i deflację znajduje wszystkie pierwiastki wielomianu.

