

Całkowanie numeryczne - kwadratura Gaussa

Dariusz Borkowski

W

wyberzmy w przedziale całkowania $[a, b]$ węzły $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ i zastosujmy wzór interpolacyjny Lagrange'a dla funkcji f

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x), \text{ gdzie } l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Wnioskujemy stąd, że

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i),$$

gdzie

$$A_i = \int_a^b l_i(x) dx.$$

Otrzymany wzór całkowania nazywamy tradycyjną kwadraturą.

Oczywiste jest, że dokładną wartość całki otrzymamy dla każdej funkcji będącej wielomianem co najwyżej stopnia n i dowolnego rozkładu węzłów x_i na odcinku $[a, b]$.

Nasuwa się pytanie, czy pewne układy węzłów są w jakimś sensie lepsze od innych. Odpowiedź na to pytanie daje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Niech węzły x_i będą $n + 1$ pierwiastkami wielomianu Lagendre'a stopnia $n + 1$ na odcinku $[-1, 1]$, wówczas kwadratura zwana kwadraturą Gaussa*

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

jest dokładna dla każdej funkcji f będącej wielo-

mianem stopnia co najwyżej $2n + 1$.

Przykład 1. Rozważmy przypadek $n = 4$. Węzły będące pierwiastkami wielomianu Legendre'a stopnia 5 mają wartość

$$x_0 = -\frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{10/7}} \approx -0.906179845938664$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{10/7}} \approx -0.538469310105683$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\sqrt{5 - 2\sqrt{10/7}} \approx 0.538469310105683$$

$$x_4 = \frac{1}{3}\sqrt{5 + 2\sqrt{10/7}} \approx 0.906179845938664.$$

Po scałkowaniu wielomianów mamy

$$A_0 \approx 0.236926885056189$$

$$A_1 \approx 0.478628670499366$$

$$A_2 \approx 0.568888888888889$$

$$A_3 \approx 0.478628670499366$$

$$A_4 \approx 0.236926885056189.$$

I końcowy wzór na całkę z funkcji f wynosi

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=0}^4 A_i f(x_i).$$

Jeżeli funkcja f będzie wielomianem stopnia co najwyżej 9 to otrzymamy dokładny wynik.

Aby wyznaczyć kwadraturę Gaussa na dowolnym

odcinku $[a, b]$ można zmienić granicę całkowania

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right) dx.$$

Zadanie 1. *Napisz w MATLAB-ie program wyznaczający kwadraturę Gaussa dla $n = 4$ na odcinku $[-1, 1]$. Deklaracja funkcji powinna być następująca:*

$$y = \text{kwadratura}(f),$$

gdzie

f – nazwa funkcji,

y – wartość całki.

Rozwiązanie: *kwadratura.m*

