

Całkowanie numeryczne - metoda Romberga

Dariusz Borkowski

P

unktem wyjścia w metodzie Romberga jest wór trapezów. Stosujemy go dzieląc przedział na 2^n podprzedziałów równej długości

$$R(n, 0) = h_n \left[\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{2^n-1} f(a + ih_n) \right],$$

gdzie

$$h_n = \frac{b - a}{2^n}.$$

Sumy $R(n, 0)$ obliczamy rekurencyjnie, aby uniknąć wielokrotnego obliczania wartości funkcji f w tych samych punktach tzn.

$$R(n, 0) = \frac{1}{2} R(n-1, 0) + h_n \left[\sum_{i=1}^{2^n-1} f(a + (2i-1)h_n) \right]$$

gdzie

$$h_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

Kolejnym krokiem jest poprawienie otrzymanych wyników, wykorzystując następujący nietrywialny fakt. Dla funkcji odpowiednio regularnej mamy

$$\int_a^b f(x)dx = R(n, 0) + a_1 h_n^2 + a_2 h_n^4 + \dots$$

W szczególności

$$\int_a^b f(x)dx = R(0, 0) + a_1 h_0^2 + a_2 h_0^4 + \dots$$

$$\int_a^b f(x)dx = R(1, 0) + a_1 \frac{h_0^2}{4} + a_2 h_1^4 + \dots$$

a stąd

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4R(1,0) - R(0,0)}{3} + \frac{4a_2h_1^4 - a_2h_0^4}{3} \dots$$

i mamy lepsze przybliżenie całki

$$R(1,1) = R(1,0) + \frac{R(1,0) - R(0,0)}{4^1 - 1}.$$

Powtarzając powyższe rozumowanie (tak jak w ekstrapolacji Richardsona) mamy wzór rekurencyjny

$$R(n,m) = R(n,m-1) + \frac{1}{4^m - 1} [R(n,m-1) - R(n-1,m-1)],$$

gdzie $m = 0, 2, \dots, n$. Za najlepsze przybliżenie całki przyjmujemy element $R(n,n)$, którego błąd wynosi $O(h_n^{2n})$.

Zadanie 1. Wyznacz z wykorzystaniem metody Rombera przybliżone wartości poniższych całek dla $n = 2$.

a) $\int_1^5 \frac{1}{x} dx,$

b) $\int_{-1}^1 2x^2 + 1 dx,$

c) $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx.$

Zadanie 2. Napisz w MATLAB-ie program realizujący metodę Rombera. Deklaracja funkcji powinna być następująca:

$$R = \text{romberg}(f, a, b, M),$$

gdzie

f – nazwa funkcji,

a, b – początek i koniec przedziału,
 M – liczba kroków,
 R – tablica przybliżeń całki.

Rozwiązanie: *romberg.m*



Zadanie 3. Sprawdź program *romberg* wyznaczając poniższe całki.

a) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin(x) dx,$

b) $\int_0^1 \sqrt{x} dx,$

c) $\int_0^1 (1-x)^{1/4} dx.$