

Całkowanie numeryczne - metoda trapezów i Simpsona

Dariusz Borkowski

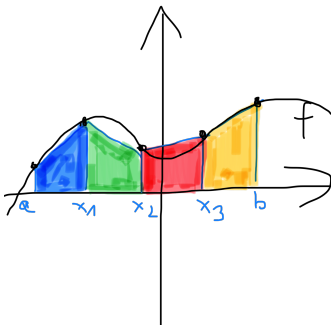
N

naszym zadaniem jest znalezienie przybliżonej wartości całki

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Tak jak w przypadku różniczkowania numerycznego jedną z metod całkowania numerycznego jest wykorzystanie poznanej wcześniej interpolacji wielomianowej. Przybliżamy całkowaną funkcję wielomianem i dla otrzymanego wielomianu wyznaczamy wartość całki. Najbardziej popularnymi metodami tego typu są metoda trapezów oraz Simpsona.

Metoda trapezów



Niech $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, gdzie $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$ będzie podziałem odcinka $[a, b]$,

wówczas

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

Każdą z całek pod znakiem sumy przybliżymy zastępując funkcję f wielomianem interpolacyjnym w węzłach x_{i-1} , x_i i stopnia co najwyżej 1 (funkcją liniową). Uzyskane w ten sposób przybliżenie całki będzie w rzeczywistości polem trapezu

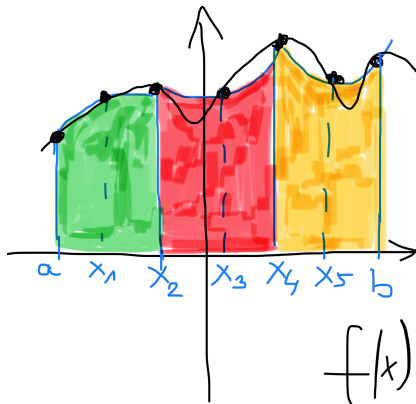
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)).$$

Ostatecznie mamy przybliżenie całki

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right],$$

której błąd wynosi $O(h^2)$.

Metoda Simpsona



W przypadku metody Simpsona funkcję na wybranym podprzedziale będziemy przybliżać wielo-

mianem stopnia co najwyżej 2 (funkcją kwadratową). Aby skonstruować taki wielomian będziemy potrzebować nie dwóch, a trzech węzłów. Oznacza to, że punktem wyjścia będzie podział odcinka $[a, b]$ na $2n$ części. Niech

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b,$$

gdzie $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{2n}$ będzie podziałem odcinka $[a, b]$, wówczas

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \\
&\sum_{i=1}^n \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] = \\
&= \frac{h}{3} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=2}^n f(x_{2i-2}) \right. \\
&\quad \left. + 4 \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) \right].
\end{aligned}$$

Błąd metody Simpsona wynosi $O(h^4)$.

Zadanie 1. Wyznacz z wykorzystaniem metody trapezów oraz Simpsona przybliżone wartości poniższych całek dla $n = 4$.

$$a) \int_{-1}^1 2x^2 + 1 dx,$$

$$b) \int_1^5 \frac{1}{x} dx,$$

$$c) \int_0^{2\pi} \sin(x) dx.$$

Zadanie 2. Napisz w *MATLAB*-ie program realizujący metodę trapezów. Deklaracja funkcji powinna być następująca:

$$s = \text{trap}(f, a, b, M),$$

gdzie

f – nazwa funkcji,

a, b – początek i koniec przedziału,
 M – liczba kroków,
 s – przybliżona wartość całki.

Rozwiązanie: *trap.m*



Zadanie 3. *Napisz w MATLAB-ie program realizujący metodę Simpsona. Deklaracja funkcji powinna być następująca:*

$$s = \text{simp}(f, a, b, M),$$

gdzie

f – nazwa funkcji,
 a, b – początek i koniec przedziału,
 M – liczba kroków,
 s – przybliżona wartość całki.

Rozwiązanie: *simp.m*



Zadanie 4. *Sprawdź programy trap, simp wyznaczając poniższe całki.*

a) $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin(x) dx,$

b) $\int_0^1 \sqrt{x} dx,$

c) $\int_0^1 (1-x)^{1/4} dx.$