

Różniczkowanie numeryczne

Dariusz Borkowski

J

ednym ze sposobów wyznaczenia pochodnej funkcji w ustalonym punkcie jest wykorzystanie poznanej wcześniej interpolacji wielomianowej. Mając dane punkty opisujące argumenty i odpowiadające im wartości funkcji możemy interpolować funkcję wielomianem, a następnie dla otrzymanego wielomianu wyznaczyć wartość szukanej pochodnej.

Zadanie 1. *Znając wartości funkcji f w punktach x_0, x_1, x_2 wyznacz wartość pochodnej $f'(x_1)$. Skorzystaj z interpolacji wielomianowej Lagrange'a.*

a)	x_i	0	1	2
	$f(x_i)$	0	1	-1
b)	x_i	-1	1	2
	$f(x_i)$	1	-2	0

Inny sposób wyznaczenia pochodnej polega na bezpośrednim zastosowaniu definicji. Przypomnijmy, że pochodną definiujemy jako granicę ilorazu różnicowego tzn.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pomijając znak granicy, dla ustalonego przyrostu h , otrzymujemy przybliżenie

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1)$$

Błąd powyższego przybliżenia wynosi $O(h)$ (wynikający bezpośrednio z twierdzenia Taylora).

Jeżeli teraz zastosujemy przybliżenie (1) dla przyrostu prawostronnego i lewostronnego, a następnie uśrednimy otrzymane wyniki to otrzymamy znacz-

nie lepsze przybliżenie, którego błąd wynosi $O(h^2)$

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \right) \\ &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \end{aligned} \tag{2}$$

Wzór (2) jest szczególnym przypadkiem tzw. ekstrapolacji Richardsona.

Ekstrapolacja Richardsona

Niech f będzie odpowiednio regularna, wówczas

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{6}h^3f^{(3)}(x) \\ + \frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x) + \frac{1}{120}h^5f^{(5)}(x) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) - \frac{1}{6}h^3f^{(3)}(x) \\ + \frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x) - \frac{1}{120}h^5f^{(5)}(x) + \dots \end{aligned}$$

Odejmując drugie równanie od pierwszego otrzymujemy (co byśmy otrzymali dodając te równa-

nia?)

$$\begin{aligned}f(x+h) - f(x-h) &= 2hf'(x) + \frac{2}{6}h^3f^{(3)}(x) \\ &\quad + \frac{2}{120}h^5f^{(5)}(x) + \dots\end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{1}{6}h^2f^{(3)}(x) \\ &\quad - \frac{1}{120}h^4f^{(5)}(x) + \dots = \\ &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2).\end{aligned}$$

Uzyskane w ten sposób przybliżenie

$$\phi(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

nazywamy zerowym krokiem ekstrapolacji Richardsona.

Jeżeli teraz napiszemy szereg Taylora dla przyrostów h i $h/2$ to mamy

$$f'(x) = \phi(h) - \frac{1}{6}h^2 f^{(3)}(x) - \frac{1}{120}h^4 f^{(5)}(x) + \dots$$

$$f'(x) = \phi\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{24}h^2 f^{(3)}(x) - \frac{1}{1920}h^4 f^{(5)}(x) + \dots$$

Mnożąc drugie równanie przez 4 i odejmując je od pierwszego otrzymujemy

$$-3f'(x) = \phi(h) - 4\phi\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{3}{480}h^4 f^{(5)}(x) + \dots$$

a stąd

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{3}\phi\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\phi(h) - \frac{1}{480}h^4 f^{(5)}(x) + \dots = \\ &= \frac{4}{3}\phi\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\phi(h) + O(h^4), \end{aligned}$$

gdzie przybliżenie pochodnej z błędem wynoszącym $O(h^4)$

$$\varphi(h) = \frac{4}{3}\phi\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\phi(h)$$

nazywamy pierwszym krokiem ekstrapolacji Richardsona.

Powtarzając powyższe rozumowanie otrzymujemy kolejne kroki ekstrapolacji Richardsona. Można

je zapisać w prostej do implementacji postaci

$$D(n, 0) = \phi \left(\frac{h}{2^n} \right)$$

$$D(n, k) = \frac{4^k}{4^k - 1} D(n, k - 1) - \frac{1}{4^k - 1} D(n - 1, k - 1) \\ k = 1, 2, \dots, M,$$

gdzie $D(M, M)$ oznacza M -ty krok ekstrapolacji Richardsona.

Zadanie 2. Korzystając ze wzoru Taylora wyprowadź wzór na przybliżanie drugiej pochodnej. Jaka jest dokładność zaproponowanego przybliżenia?

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{6}h^3f^{(3)}(x) \\ + \frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x) + \frac{1}{120}h^5f^{(5)}(x) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) - \frac{1}{6}h^3f^{(3)}(x) \\ + \frac{1}{24}h^4f^{(4)}(x) - \frac{1}{120}h^5f^{(5)}(x) + \dots \end{aligned}$$

Dodając drugie równanie od pierwszego otrzymujemy

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$



Zadanie 3. Stosując zerowy oraz pierwszy krok ekstrapolacji Richardsona dla $h = 1$ i $h = \frac{1}{2}$, oblicz wartości pochodnych

a) $f'(2)$ dla $f(x) = x^2$,

b) $f'(0)$ dla $f(x) = \sin(\pi x)$,

c) $f'(0)$ dla $f(x) = 2x^3 + 1$.

Zadanie 4. Napisz w *MATLAB*-ie program realizujący algorytm ekstrapolacji Richardsona. Deklaracja funkcji powinna być następująca:

$$D = \text{richard}(f, a, h, M),$$

gdzie

f – nazwa funkcji,

a – argument pochodnej,

h – przyrost,

M – liczba kroków,

D – tablica przybliżeń pochodnej.

Rozwiązanie: *richard.m*



Zadanie 5. *Przetestuj program *richard* dla wcześniejszych przykładów.*