

# **Funkcje sklejane**

Dariusz Borkowski

# W

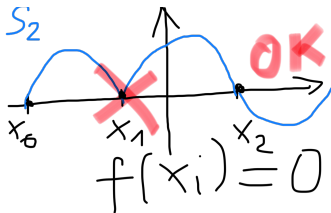
poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się problemem przybliżania funkcji za pomocą wielomianu. W tym rozdziale dopuścimy możliwość łączenia kilku wielomianów. Kluczowe w konstrukcji takiego przybliżenia, czyli funkcji sklejaney są miejsca łączenia. Musimy zadbać, aby końcowa funkcja sklejana było odpowiednio regularna.

Niech będą dane węzły wyznaczone przez pewną funkcję  $f$ .

|     |                |                |         |                |
|-----|----------------|----------------|---------|----------------|
| $x$ | $x_0$          | $< x_1$        | $\dots$ | $< x_n$        |
| $y$ | $y_0 = f(x_0)$ | $y_1 = f(x_1)$ | $\dots$ | $y_n = f(x_n)$ |

Funkcją sklejaną stopnia  $k$  nazywamy funkcję  $S_k$  spełniającą warunki

$$- S_k(x_i) = y_i,$$



- na każdym przedziale  $[x_{i-1}, x_i]$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $k$ ,
- ma ciągłą  $(k - 1)$  pochodną na przedziale  $[x_0, x_n]$ .

**Zadanie 1.** Znajdź funkcję sklejaną stopnia 1 interpolującą poniższe dane.

|     |      |     |     |     |
|-----|------|-----|-----|-----|
| $x$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $3$ |
| $y$ | $1$  | $0$ | $4$ | $1$ |

**Rozwiązanie:** Funkcja sklejana musi być ciągła (ma zerową pochodną ciągłą) i składa się z wielomianów stopnia co najwyżej 1. Dla każdego przedziału musimy wyznaczyć wielomian, który jest funkcją liniową przechodzącą przez dwa punkty  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  oraz  $(x_i, y_i)$ .

$$S_1(x) = \begin{cases} \frac{x-(-1)}{1-(-1)}(0-1) + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [-1, 1) \\ \frac{x-1}{2-1}(4-0) + 0 = 4x - 4 & \text{dla } x \in [1, 2), \\ \frac{x-2}{3-2}(1-4) + 4 = -3x + 10 & \text{dla } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

□

**Zadanie 2.** Znajdź funkcję sklejaną stopnia 3 interpolującą poniższe dane.

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $y$ | 0 | 1 |

**Rozwiązanie:** Funkcja sklejana musi być wielomianem stopnia co najwyżej 3 i mieć ciągłą 2 pochodną. Zauważmy, że dowolny wielomian stopnia co najwyżej 3 przechodzący przez te dwa punkty jest rozwiązaniem np.

$$S_3(x) = x^2 \quad \text{lub} \quad S_3(x) = x.$$



Powyższe zadanie pokazuje, że funkcje sklepane stopnia większego niż jeden nie są określone jednoznacznie. Dlatego wprowadza się dodatkowe założenie o regularności takiej funkcji, a dokładniej o zachowaniu jej w punktach końcowych  $x_0$  i  $x_n$ . Szczególnie ważne znaczenie w zastosowaniach praktycznych mają funkcje sklepane stopnia 3 od których żąda się aby druga pochodna w punktach końcowych wynosiła zero tzn.  $S_3''(x_0) = S_3''(x_n) = 0$ .

O takiej funkcji mówimy wówczas, że jest naturalną funkcją sklejaną stopnia 3.

**Twierdzenie 1.** *Naturalna funkcja sklejana stopnia 3 jest określona jednoznacznie.*

Wyznaczenie funkcji sklejanej sprowadza się do rozwiązania układu równań wynikającego z definicji. Poniżej podajemy schemat dla wyznaczania naturalnej funkcji sklejanej stopnia 3.

## Schemat wyznaczania naturalnej funkcji sklejanego stopnia 3

Dane:

|     |       |         |         |         |
|-----|-------|---------|---------|---------|
| $x$ | $x_0$ | $< x_1$ | $\dots$ | $< x_n$ |
| $y$ | $y_0$ | $y_1$   | $\dots$ | $y_n$   |

$$h_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$d_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k},$$

$$u_k = 6(d_k - d_{k-1}),$$

$$m_0 = 0,$$

$$m_n = 0,$$

$$h_{k-1}m_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)m_k + h_k m_{k+1} = u_k,$$

$$k = 1, 2, 3 \dots n - 1,$$

$$s_{k,0} = y_k, \quad k = 0, 1, 2 \dots n-1,$$

$$s_{k,1} = d_k - \frac{h_k(2m_k + m_{k+1})}{6}, \quad k = 0, 1, 2 \dots n-1,$$

$$s_{k,2} = \frac{m_k}{2}, \quad k = 0, 1, 2 \dots n-1,$$

$$s_{k,3} = \frac{m_{k+1} - m_k}{6h_k}, \quad k = 0, 1, 2 \dots n-1,$$

$$S_k(x) = s_{k,0} + s_{k,1}(x - x_k) + s_{k,2}(x - x_k)^2 + \\ + s_{k,3}(x - x_k)^3, \quad k = 0, 1, 2 \dots n-1.$$

Wynik:  $S(x) = S_k(x), \quad x \in [x_k, x_{k+1}].$

**Zadanie 3.** *Znajdź naturalną funkcję sklejaną stopnia 3 interpolującą poniższe dane.*

|     |   |     |   |     |
|-----|---|-----|---|-----|
| $x$ | 0 | 1   | 2 | 3   |
| $y$ | 0 | 0.5 | 2 | 1.5 |

**Zadanie 4.** Znajdź funkcję sklejaną stopnia 1 oraz naturalną funkcję sklejaną stopnia 3 interpolującą poniższe dane.

|     |      |      |     |     |
|-----|------|------|-----|-----|
| $x$ | $-1$ | $0$  | $2$ | $3$ |
| $y$ | $1$  | $-1$ | $2$ | $1$ |

**Zadanie 5.** Napisz w MATLAB-ie program wyznaczający naturalną funkcję sklejaną stopnia 3. Skorzystaj z algorytmu eliminacji Gaussa, aby rozwiązać układ równań. Deklaracja implementowanej funkcji powinna być następująca:

$$S = \text{cubicspline}(X, Y),$$

gdzie

$X$  – węzły interpolacji spełniające warunek  $X(i) < X(i+1)$ ,

$Y$  – wartości w punktach  $X$ ,

*S – macierz współczynników wielomianów interpolacyjnych; w każdym wierszu zapisane są współczynniki odpowiedniego wielomianu.*

**Rozwiązanie:** *cubicspline.m*



**Zadanie 6.** *Przetestuj program `cubicspline` dla wcześniejszych przykładów.*