

Eliminacja Gaussa z wybozem elementów głównych

Dariusz Borkowski



deę algorytmu pokażemy na przykładzie.
Chcemy rozwiązać układ równań postaci

$$A \cdot x = b,$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 1 & -6 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Algorytm można podzielić na trzy podstawowe kroki.

1. Na początku dokonamy rozkładu macierzy A na postać

$$P \cdot A = L \cdot U,$$

gdzie P jest macierzą permutacji, L jest macierzą dolnotrójkątną, a U górnortrójkątną. Macierz P , będziemy reprezentować w postaci wektora permutacji $p = (p_1, p_2, p_3)$ zbioru $(1, 2, 3)$. Taki wektor permutacji wyznaczy nam macierz kwadratową P przez przedstawienie wierszy macierzy identycznościowej zgodnie z p . Chcemy wyzerować elementy macierzy $A = (a_{i,j})$ poniżej przekątnej. Możemy wykonywać operacje na wierszach: odejmować wiersze i mnożyć przez liczbę. Dodatkowo dopuszczamy możliwość przestawiania wierszy, tak aby nasz algorytm był jak najbardziej uniwersalny i działał dla możliwie największego zbioru macierzy. Oczywiście wszystkie operacje będą zapamiętane w macierzach P , L , U .

Wyznaczamy wektor s zwany skalą każdego

wiersza taki, że

$$s_i = \max_{1 \leq j \leq 3} |a_{i,j}|.$$

Niech $p = (1, 2, 3)$ (co oznacza, że nie dokonaliśmy przestawienia wierszy) i $s = (6, 8, 3)$. W pierwszym kroku rozkładu wyznaczamy pierwszy wiersz główny – czyli ten którego elementu nie będziemy zerować, a dla którego iloraz

$$\frac{|a_{i,1}|}{s_i} = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{3} \end{bmatrix}$$

jest największy. Największy jest trzeci z nich i ten będzie pierwszym wierszem głównym. Dlatego przestawiamy p_1 z p_3 , co daje $p =$

$(3, 2, 1)$ oraz $s = (3, 8, 6)$, a macierz po przedstawieniu ma postać

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -6 & 8 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Od wierszy drugiego i trzeciego odejmujemy takie wielokrotności pierwszego wiersza, aby wyzerować w nich elementy pierwszej kolumny. Kwadrat w macierzy oznacza wartość zero, a wewnątrz kwadratów wpisaliśmy mnożniki, które były potrzebne do wyzerowania

tego elementu.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ \boxed{\frac{1}{3}} & \frac{-16}{3} & \frac{23}{3} \\ \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{13}{3} & \frac{-20}{3} \end{bmatrix}$$

Analogicznie postępujemy teraz z macierzą o jeden wymiar mniejszą znajdującą się w prawym dolnym rogu. Pozostałe elementy: pierwszy wiersz i kolumna już są wyznaczone i nie ulegną zmianie. Tym razem wybór wiersza głównego zależy od liczb

$$\begin{bmatrix} \frac{16}{3}/8 = \frac{2}{3} \\ \frac{13}{3}/6 = \frac{13}{18} \end{bmatrix}$$

Większa jest ta ostanía. Dlatego przestawiamy p_2 z p_3 co daje $p = (3, 1, 2)$ oraz $s = (3, 6, 8)$, a w macierzy przestawiamy wiersz drugi z trzecim

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{13}{3} & -\frac{20}{3} \\ \boxed{\frac{1}{3}} & -\frac{16}{3} & \frac{23}{3} \end{bmatrix}$$

Następnie zerujemy, zapamiętując mnożniki, elementy pod przekątną w drugiej kolumnie.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ \boxed{\frac{2}{3}} & \frac{13}{3} & -\frac{20}{3} \\ \boxed{\frac{1}{3}} & \boxed{-\frac{16}{13}} & -\frac{7}{13} \end{bmatrix}$$

I to był ostatni krok, gdyż otrzymaliśmy macierz górnotrójkątną

$$U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{13}{3} & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{13} \end{bmatrix}$$

Macierz dolnotrójkątna to mnożniki w prostokątach i jedynki na przekątnej

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{16}{13} & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz permutacji P to poprzestawiane wiersze macierzy identycznościowej zgodnie z wek-

torem p tzn.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Rozwiązujemy układ równań (łatwy do rozwiązania)

$$L \cdot y = P \cdot b$$

Oznaczmy wektor $c = P \cdot b$, wówczas rozwiązanie jest postaci

$$y_i = \frac{\left(c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j} y_j \right)}{l_{i,i}},$$

co w naszym szczególnym przypadku ozna-

cza, że

$$y = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -\frac{3}{13} \end{bmatrix}.$$

3. Rozwiązujemy układ równań (również łatwy do rozwiązania)

$$U \cdot x = y$$

Elementy wektora wyznaczamy od indeksów większych do mniejszych zgodnie z wzorem

$$x_i = \frac{\left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{i,j} x_j \right)}{u_{i,i}},$$

co daje nam końcowe rozwiązanie

$$x = \begin{bmatrix} \frac{24}{21} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 1. *Napisz w MATLAB-ie program wyznaczający rozkład $PA = LU$, z wykorzystaniem rozkładu dla eliminacji Gaussa ze skalowanym wyborem wierszy głównych. Deklaracja funkcji powinna być następująca:*

$$[P, L, U] = \text{decomPLU}(A),$$

gdzie

A – macierz kwadratowa,

L – macierz dolnotrójkątna,

U – macierz górnootrójkątna,

P – macierz permutacji.

Rozwiązanie: *decomPLU.m*



Zadanie 2. *Sprawdź program `decomPLU` dla poniższych macierzy.*

$$a) \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix},$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. *Napisz w MATLAB-ie program rozwiązujący układ równań $Ax = b$, gdzie A jest macierzą dolnotrójkątną. Deklaracja funkcji powinna być następująca:*

$$X = \text{solvl}(A, B),$$

gdzie

A – macierz dolnotrójkątna,

B – wektor,

X – rozwiązanie układu równań.

Rozwiązanie: `solvl.m`



Zadanie 4. *Napisz w MATLAB-ie program rozwiązujący układ równań $Ax = b$, gdzie A jest macierzą górnątrójkątną. Deklaracja funkcji powinna być następująca:*

$$X = \text{solveU}(A, B),$$

gdzie

A – macierz górnątrójkątna,

B – wektor,

X – rozwiązanie układu równań.

Rozwiązanie: *`solveU.m`*



Zadanie 5. *Napisz w MATLAB-ie program rozwiązujący układ $Ax = b$ z wykorzystaniem rozkładu*

$PA = LU$. Deklaracja funkcji powinna być następująca:

$$X = \text{solvePLU}(A, B),$$

gdzie

A – macierz kwadratowa,

B – wektor,

X – rozwiązanie układu równań.

Rozwiązanie: `solvePLU.m`



Zadanie 6. Sprawdź program `solvePLU` rozwiązując poniższe układy równań.

$$a) \begin{cases} -9x_1 + x_2 + 17x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ 3x_1 = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + x_2 = 100 \\ 3x_1 + 0.01x_2 = 1 \end{cases}$$