

# **Interpolacja trygonometryczna**

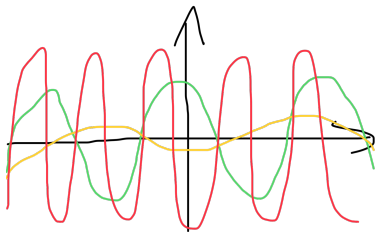
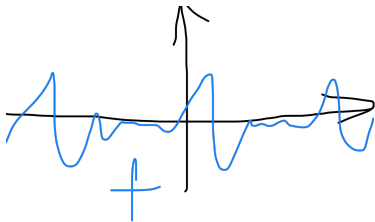
Dariusz Borkowski

# W

Wielomiany algebraiczne nie nadają się do opisu (przybliżania) zjawisk okresowych. Znacznie bardziej odpowiednie są tu wielomiany trygonometryczne. Wielomianem trygonometrycznym stopnia co najwyżej  $n$ -tego nazywamy funkcję

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^n c_k (e^{ix})^k,$$

czyli zwykły wielomian względem zmiennej  $e^{ix}$ .



Wielomian trygonometryczny interpolujący  $2\pi$ -okresową funkcję  $f$  w węzłach równoodległych  $x_m = \frac{2\pi m}{N}$ , gdzie  $0 \leq m \leq N - 1$  wyraża się wzorem

$$P_{N-1}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx},$$

gdzie

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(x_m) e^{-ikx_m} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} f(x_m) e^{\frac{-2i\pi km}{N}}.$$

Jeżeli interpolowana funkcja jest  $T$ -okresowa, to musimy ją przeskalować do funkcji  $2\pi$ -okresowej ( $x \rightarrow \frac{T}{2\pi}x$ ), znaleźć wielomian trygonometryczny, a następnie przeskalować otrzymany wielomian ( $x \rightarrow \frac{2\pi}{T}x$ ).

Przekształceniem, które z ciągu wartości  $\{f(x_m)\}$  wyznacza ciąg współczynników  $\{c_k\}$  nazywamy dyskretną transformatą Fouriera (DFT). Jeżeli liczymy dyskretną transformatę Fouriera bezpośrednio z definicji, to złożoność jej jest kwadratowa. Przełomowym momentem w wykorzystaniu dyskretnej transformaty Fouriera do numerycznych zastosowań było odkrycie szybkiej metody jej wyznaczania zwanej szybką transformatą Fouriera (FFT).

**Zadanie 1.** Znaleźć wielomian trygonometryczny stopnia 1 i 3 interpolujący w węzłach równoodległych funkcję

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right),$

b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x),$

c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(4x),$

d)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o okresie  $2\pi$  taką, że  $f(x) = |x|$   
dla  $|x| \leq \pi$ .