

Optymalne węzły interpolacji

Dariusz Borkowski

W

poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się problemem wyznaczenia wielomianu interpolacyjnego na podstawie z góry ustalonych punktów, które zazwyczaj były argumentami i wartościami pewnej funkcji. W tym rozdziale naszym zadaniem będzie wskazanie tych punktów, tak aby znaleziony wielomian jak „najlepiej” przybliżał funkcję.

Zależność między wielomianem, a interpolowaną funkcją opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $f \in C^{n+1}[a, b]$, a wielomian W_n stopnia co najwyżej n interpoluje wartości funkcji f w $n+1$ różnych punktach $x_0, x_1, \dots, x_n$ przedziału $[a, b]$, to dla każdego $x \in [a, b]$ istnieje $\xi_x \in (a, b)$ taki, że*

$$f(x) - W_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

W oszacowaniu różnicy $f(x) - W_n(x)$ ostatni czynnik można zoptymalizować, wybierając węzły w szczególnie sposób (o takich węzłach będziemy mówić, że są optymalne). To zadanie zbadał wielki matematyk rosyjski Czebyszew, a rozwiązanie wyraża się przez wielomiany noszące jego imię. Czebyszew otrzymał te wielomiany, rozwiązując zadanie optymalizacji mechanizmu przenoszenia ruchu posuwistego koła w parowozie na ruch obrotowy

kół.

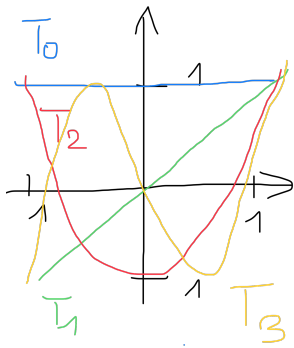
Problem optymalnego doboru punktów interpolacji rozważmy w pierwszej kolejności na odcinku $[a, b] = [-1, 1]$. Wielomiany Czebyszewa na tym odcinku zdefiniowane są następującym wzorem rekurencyjnym:

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Okazuje się, że optymalnym wyborem węzłów interpolacji są pierwiastki wielomianu Czebyszewa.



Jeżeli chcemy skonstruować wielomian interpolacyjny W_n stopnia co najwyżej n , to musimy wyznaczyć pierwiastki wielomianu Czebyszewa stopnia $n + 1$, tzn. wielomianu T_{n+1} . Pierwiastki wielomianu Czebyszewa T_{n+1} zadane są wzorem

$$p_i = \cos \left(\frac{(2i + 1)\pi}{2n + 2} \right) \quad dla \quad 0 \leq i \leq n$$

i są optymalnymi $(n + 1)$ węzłami interpolacji na odcinku $[-1, 1]$.

Jeżeli rozważamy dowolny przedział $[a, b]$ to musimy dokonać liniowego przekształcenia odcinka $[-1, 1]$ na $[a, b]$ uzyskując optymalne węzły w ogólnym przypadku

$$x_i = \frac{b - a}{2} p_i + \frac{a + b}{2} = \frac{b - a}{2} \cos \left(\frac{(2i + 1)\pi}{2n + 2} \right) + \frac{a + b}{2}$$

Zadanie 1. Wyznacz wielomian Czebyszewa stopnia 3 i 5.

Zadanie 2. Znajdź optymalne węzły interpolacji wielomianem stopnia 1 oraz 2 na odcinku

a) $[1, 3]$

b) $[-1, 1]$,

c) $[-3, 2]$,

d) $[6, 8]$.

Zadanie 3. Napisz w *MATLAB*-ie program wyznaczający optymalne węzły interpolacji wielomianem stopnia n na odcinku $[a, b]$ dla danej funkcji f . Deklaracja implementowanej funkcji powinna być następująca:

$$[X, Y] = \text{cheby}(f, n, a, b),$$

gdzie

f – nazwa aproksymowanej funkcji,

n – stopień wielomianu interpolacyjnego,
 a, b – początek i koniec odcinka,
 X – optymalne węzły interpolacji,
 Y – wartości w punktach X .

Rozwiązanie: *cheby.m*



Uwaga 1. Wyznaczone tablice $[X, Y]$ są danymi wejściowymi dla programów *intnewton* oraz *intlagran*.

Zadanie 4. Wyznacz wielomiany interpolacyjne stopnia 10 na odcinku $[0, 2]$, dla funkcji $\frac{1}{1+12(x-1)^2}$ oraz równomiernie i optymalnie rozłożonych węzłów interpolacji. Narysuj wykres funkcji oraz otrzymanych wielomianów.

