

Interpolacja Hermite'a

Dariusz Borkowski

I

Interpolacja Hermite'a, czyli interpolacja z węzłami wielokrotnymi, polega na poszukiwaniu wielomianu, który w węzłach ma dane nie tylko wartości, ale i wartości pochodnych.

Dla danej funkcji f i uporządkowanych węzłów interpolacji $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$ szukamy wielomianu stopnia co najwyżej n , który ma następującą własność: jeśli pewien punkt x_i występuje na liście węzłów k_i razy, to

$$W_n^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \stackrel{ozn.}{=} y_i^{(j)} \text{ dla } 0 \leq j \leq k_i - 1.$$

Twierdzenie 1. *Wielomian interpolacyjny Hermite'a jest określony jednoznacznie.*

Wielomian interpolacyjny wyznaczmy z wykorzystaniem ilorazów różnicowych. Jednak w interpolacji Hermite'a, gdzie węzły mogą się powtarzać, nie możemy zastosować poznanego wcześniej wzoru na ilorazy różnicowe gdyż może pojawić się dzielenie przez zero. Aby uniknąć takiej sytuacji wprowadzimy bardziej ogólną postać ilorazów różnicowych, w której wykorzystamy informację o wartościach pochodnych.

Niech będą dane $(n + 1)$ punkty interpolacji z węzłami wielokrotnymi zapisane w wygodnej postaci

x	$x_0 <$	$x_{k_0} <$	$\dots$	x_n
$y^{(0)}$	$y_0^{(0)}$	$y_{k_0}^{(0)}$	$\dots$	$y_n^{(0)}$
$y^{(1)}$	$y_0^{(1)}$	$y_{k_0}^{(1)}$	$\dots$	$y_n^{(1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$y^{(k_i-1)}$	$y_0^{(k_0-1)}$	$y_{k_0}^{(k_{k_0}-1)}$	$\dots$	

Szukany wielomian stopnia co najwyżej n zadany jest wzorem

$$W_n(x) = d_0 + (x - x_0)d_1 + \dots + \\ + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})d_n,$$

gdzie liczby d_i musimy policzyć.

Twierdzenie 2. *Niech*

$$f[x_i] = y_i$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

$$x_0 \neq x_n,$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \quad x_0 = x_n,$$

wówczas

$$d_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i].$$

Zadanie 1. *Znajdź z wykorzystaniem ilorazów różnicowych wielomian możliwie niskiego stopnia, interpolujący poniższe dane.*

a)

x	-1	2
$y^{(0)}$	1	10
$y^{(1)}$		12
$y^{(2)}$		12

b)

x	0	1
$y^{(0)}$	1	0
$y^{(1)}$	-2	1

c)

x	0	1	2
$y^{(0)}$	2	-4	44
$y^{(1)}$	-9	4	

d)

x	0	1	2	3
$y^{(0)}$	2	-4	44	2
$y^{(1)}$	-9	4		

e)

x	1	2
$y^{(0)}$	2	6
$y^{(1)}$	3	7
$y^{(2)}$		8

Zadanie 2. *Napisz w MATLAB-ie program wyznaczający wielomian interpolacyjny Hermite'a. Wykorzystaj własności ilorazów różnicowych. Deklaracja funkcji powinna być następująca:*

$$[C,D]=inthermit(X,Y),$$

gdzie

X – węzły interpolacji spełniające warunek $X(i) \leq X(i+1)$,

Y – wartości w punktach X ; jeżeli $X(i) = X(i+1) = \dots = X(i+n)$, to odpowiadające im wartości oznaczają odpowiednio $Y(i) = f(x_i)$, $Y(i+1) = f^{(1)}(x_i)$, ..., $Y(i+n) = f^{(n)}(x_i)$,

C – współczynniki wielomianu interpolacyjnego postaci $c(1)x^{n-1} + c(2)x^{n-2} + \dots + c(n-1)x + c(n)$,
 D – tablica ilorazów różnicowych.

Rozwiązanie: *inthermit.m*



Zadanie 3. Sprawdź program *inthermit* i wyznacz wielomian możliwie niskiego stopnia interpolujący poniższe dane.

x	0	1	2	3
$y^{(0)}$	2	-4	44	2
$y^{(1)}$	-9	4		

Zadanie 4. Przetestuj program *inthermit* dla pozostałych przykładów.