

# **Interpolacja Newtona**

Dariusz Borkowski

# R

ozważany problem się nie zmienia. Dane są punkty interpolacji

|     |       |       |         |       |
|-----|-------|-------|---------|-------|
| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $\dots$ | $x_n$ |
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $\dots$ | $y_n$ |

gdzie  $x_i \neq x_j$  dla  $i \neq j$ , musimy znaleźć wielomian stopnia co najwyżej  $n$  o własności  $W_n(x_i) = y_i$ .

Konstrukcja wielomianu interpolacyjnego metodą Newtona jest następująca. Wyznaczamy wielomian stopnia zero dla danych

|     |       |
|-----|-------|
| $x$ | $x_0$ |
| $y$ | $y_0$ |

tj.

$$W_0(x) = d_0 = y_0.$$

Dodajemy kolejną parę do punktów interpolacji

|     |       |       |
|-----|-------|-------|
| $x$ | $x_0$ | $x_1$ |
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ |

i korzystamy z wcześniejszych rachunków definiując wielomian stopnia 1 postaci

$$W_1(x) = W_0(x) + (x - x_0)d_1,$$

gdzie  $d_1$  jest liczbą rzeczywistą spełniającą równanie  $W_1(x_1) = y_1$ , a wynoszącą w tym przypadku

$$d_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Zauważmy, że jeżeli podstawimy argument  $x_i$  o indeksie mniejszym niż nowo dopisany, to nasz wielomian staje się wielomianem z wcześniejszego kroku. Powyższe rozumowanie powtarzamy i w  $i$ -tym kroku dla danych

|     |       |       |         |       |
|-----|-------|-------|---------|-------|
| $x$ | $x_0$ | $x_1$ | $\dots$ | $x_i$ |
| $y$ | $y_0$ | $y_1$ | $\dots$ | $y_i$ |

otrzymujemy wielomian stopnia  $i$  postaci

$$W_i(x) = W_{i-1}(x) + (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{i-1})d_i,$$

gdzie  $d_i$  jest tak dobrane, że spełnia równanie  $W_i(x_i) = y_i$ . Ostatecznie po wykonaniu  $n$  kroków końcowy wielomian ma postać

$$\begin{aligned} W_n(x) &= W_{n-1}(x) + (x-x_0)(x-x_1) \cdots \\ &\quad (x-x_{n-1})d_n = \\ &= d_0 + (x-x_0)d_1 + \cdots + \\ &\quad + (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{n-1})d_n. \end{aligned}$$

Wyznaczając w poniższych zadaniach wielomiany metodą Newtona, można zauważyć, że największą

trudność sprawia nam wyznaczenie liczb  $d_i$ . Na następnym wykładzie wprowadzimy pojęcie ilorazów różnicowych, które pozwolą nam na szybkie obliczenie tych liczb, a co ważniejsze metoda Newtona będzie łatwa do implementacji.

**Zadanie 1.** Znajdź metodą Newtona wielomian możliwie niskiego stopnia, interpolujący poniższe dane.

a)

|     |     |   |   |
|-----|-----|---|---|
| $x$ | 7   | 1 | 2 |
| $y$ | 146 | 2 | 1 |

a)

|     |   |    |
|-----|---|----|
| $x$ | 3 | 7  |
| $y$ | 5 | -1 |

b)

|     |    |     |   |   |
|-----|----|-----|---|---|
| $x$ | 3  | 7   | 1 | 2 |
| $y$ | 10 | 146 | 2 | 1 |

c)

|     |    |   |   |
|-----|----|---|---|
| $x$ | -2 | 0 | 1 |
| $y$ | 43 | 7 | 4 |

d)

|     |   |   |    |   |
|-----|---|---|----|---|
| $x$ | 1 | 2 | 0  | 3 |
| $y$ | 3 | 2 | -4 | 5 |