

Interpolacja Lagrange'a

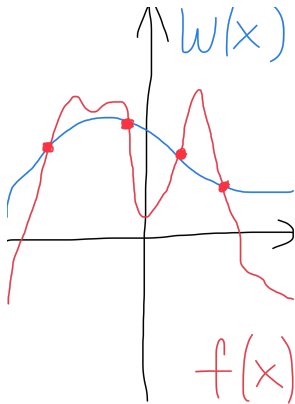
Dariusz Borkowski

D

ane są punkty $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, gdzie $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Naszym zadaniem jest znalezienie wielomianu W_n stopnia co najwyżej n , który będzie spełniał warunek $W_n(x_i) = y_i$.

Twierdzenie 1. *Jeżeli liczby $x_0, x_1, \dots, x_n$ są parami różne, to istnieje dokładnie jeden wielomian stopnia co najwyżej n taki, że $W_n(x_i) = y_i$ dla $0 \leq i \leq n$.*

Jeżeli liczby y_i są wartościami pewnej funkcji f , to wówczas za pomocą interpolacji przybliżamy funkcję f wielomianem odpowiedniego stopnia. Mówimy wówczas, że wielomian W_n interpoluje funkcję f .



Niech będą dane punkty interpolacji zapisane w wygodnej postaci

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

W przypadku interpolacji metodą Lagrange'a szukany wielomian stopnia n wyraża się sumą

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x), \quad (1)$$

gdzie $l_i(x)$ są wielomianami stopnia n postaci

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Zauważmy, że powyższy wielomian ma własność

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j, \\ 1 & \text{dla } i = j. \end{cases}$$

Oznacza to, że jeśli we wzorze (1) podstawimy do wielomianu x_i to otrzymamy wartość y_i .

Zadanie 1. Znajdź metodą Lagrange'a wielomian możliwie niskiego stopnia, interpolujący poniższe dane.

$$a) \begin{array}{c|cccc} x & 7 & 1 & 2 & \\ \hline y & 146 & 2 & 1 & \end{array}$$

$$b) \begin{array}{c|cccc} x & 3 & & 7 & \\ \hline y & 5 & & -1 & \end{array}$$

$$c) \begin{array}{c|cccccc} x & 3 & & 7 & 1 & 2 \\ \hline y & 10 & 146 & 2 & 1 & \end{array}$$

$$d) \begin{array}{c|cccc} x & 2 & 0 & 3 & \\ \hline y & 11 & 7 & 28 & \end{array}$$

$$e) \begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 0 & 3 \\ \hline y & 3 & 2 & -4 & 5 \end{array}$$

Zadanie 2. Napisz w MATLAB-ie program wyznaczający wielomian interpolacyjny Lagrange'a. Deklaracja funkcji powinna być następująca:

$$[C, L] = \text{intlagran}(X, Y),$$

gdzie

X – węzły interpolacji spełniające warunek $X(i) \neq X(j)$,

Y – wartości w punktach X ,

C – współczynniki wielomianu interpolacyjnego postaci $c(1)x^{n-1} + c(2)x^{n-2} + \dots + c(n-1)x + c(n)$,

L – tablica współczynników wielomianów l_i .

Rozwiązanie: *intlagran.m*



Zadanie 3. Przetestuj program *intlagran* dla wcześniejszych przykładów.